

# مکانیک آماری کوانتومی - بخش دوم: مطالعه مقدماتی گاز فرمیونی و بوزونی

وحید کریمی پور - دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۸ خرداد ۱۴۰۴

## ۱ مقدمه

آنچه که در درس گذشته آموختیم مقدمه ای بود بر مکانیک آماری ذرات یکسان و اینکه چگونه می توانیم در آزمایش های میکروکانونیک یا کانونیک سیستمی از ذرات یکسان و تمیزناپذیر را مطالعه کرد. هر دو آزمایش نهایتاً به یک مجموعه روابط منتهی می شدند. از این به بعد خود را محدود به آزمایش کانونیک خواهیم کرد. البته این محاسبه ما را ناگزیر کرد که نهایتاً از آزمایش گراندکانونیک استفاده کنیم و روابط کلی را برای چنین سیستمی بدست آوریم. می خواهیم این روابط را جداگانه برای گاز فرمیونی و بوزونی مطالعه کنیم و خواص مقدماتی این گازها را بدست آوریم. منظور از خواص مقدماتی این است که گاز فرمیونی را در دمای صفر مطالعه می کنیم. در مورد گاز بوزونی نیز تنها خود را محدود به مطالعه یک پدیده خاص یعنی پدیده چگالش بوز-اینشتین می کنیم. مطالعه این گازها را در محدوده وسیع تری از دما به درس های آینده موکول می کنیم. بدیهی است که فهمیدن درس گذشته یعنی مکانیک آماری کوانتومی یک، پیش نیاز جدی برای درک مطالب این درس است. در درس گذشته یادگرفتیم که تابع پارش گراندکانونیک برای گاز فرمیونی و بوزونی به صورت فرمال چگونه محاسبه می شوند. این توابع به شکل زیر بودند. برای بوزون ها:

$$Q^+(z) = \prod_{i=1}^K \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_i}} \quad \text{Bosons} \quad (1)$$

و برای فرمیون ها:

$$Q^-(z) = \prod_{i=1}^K 1 + ze^{-\beta\epsilon_i} \quad \text{Fermions.} \quad (2)$$

به این ترتیب تابع پارش گراندکانونیک برای فرمیون ها و بوزون ها براحتی محاسبه شدند. از آنجا که همه کمیت ها از لگاریتم این تابع پارش بدست می آید بهتر است که لگاریتم این توابع را بنویسیم:

■ برای فرمیون ها:

$$\ln Q(z) = \sum_{i=1}^K \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (3)$$

■ برای بوزون ها:

$$\ln Q(z) = - \sum_{i=1}^K \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (4)$$

به نظر می رسد که تابع پارش بوزون ها و فرمیون ها تفاوت خیلی کمی با هم دارند ولی خواهیم دید که همین تفاوت خیلی کم باعث پدیده های به کلی متفاوتی برای بوزون ها و فرمیون ها می شود. در دو بخش آینده به ترتیب خواص کلی گاز فرمیونی و گاز بوزونی را مطالعه می کنیم. البته مطالعه ما منحصر به خصوصیات کلی و خیلی کوتاه است. یعنی گاز فرمی را تنها در دمای صفر مطالعه می کنیم. هم چنین در مورد بوزون ها هم خود را محدود به مطالعه یک پدیده خاص یعنی چگالش بوز-اینشتین می کنیم. مطالعه تفصیلی هر دو گاز را در دماهای دلخواه به درس های آینده واگذار می کنیم. در ادامه این درس چون در دو بخش جداگانه فرمیون ها و بوزون ها را بررسی می کنیم، تابع پارش هر دوی آنها را با  $Q(z)$  نشان می دهیم. در هر بخش معلوم است که ما با کدام تابع پارش سروکار داریم و دیگر نیازی به نوشتن اندیس های مثبت و منفی نیست.

## ۲ گاز فرمیونی ایده آل

گاز فرمیونی ایده آل توصیف کننده تقریبی بسیاری از گازهایی است که در طبیعت وجود دارد. الکترون های درون یک فلز، هستک های درون یک هسته بزرگ مثل اورانیوم، نوترون های درون یک ستاره نوترونی و بالاخره الکترون های درون یک ستاره کوتوله سفید، همگی نمونه هایی از یک گاز فرمیونی هستند. به دلیل اصل طرد پائولی انرژی یک گاز فرمی در دمای صفر خیلی بیشتر از انرژی حالت پایه ذرات گاز است چرا که

همه ذرات در حالت پایه قرار نمی گیرند. در واقع در دما صفر ذرات گاز در ترازهای متوالی مربوط به یک تک ذره از پایین ترین تراز انرژی تا آخرین تراز انرژی که اصطلاحاً انرژی فرمی نامیده می شود روی هم چیده می شوند. به همین دلیل انرژی گاز فرمی در دمای صفر متناسب با تعداد ذرات است و به طور کیفی می توان نوشت:

$$U(T=0) = cN\epsilon_F,$$

که در آن  $\epsilon_F$  انرژی فرمی،  $N$  تعداد ذرات و  $c$  یک ضریب عددی کوچکتر از یک است که باید آن را محاسبه کنیم. اصل طرد پاولی و این که نمی توان همه فرمیون ها را در حالت های کوانتومی نزدیک به هم فشرده کرد باعث می شود که فشار گاز فرمی حتی در دمای صفر یک فشار خیلی زیاد باشد که آن را فشار واگنی<sup>۱</sup> می نامیم. در ستاره های کوتوله سفید فشار واگنی گاز الکترونی باعث می شود که ستاره ای که سوختش را از دست داده بتواند در مقابل نیروی رمبش بسیار عظیم گرانش مقاومت کند و در هم فرو نریزد. در ستاره های نوترونی نیز فشار واگنی گاز نوترونی از رمبش بیشتر ستاره جلوگیری می کند. پس از این مقدمات می توانیم به بررسی گاز فرمیونی بپردازیم.

نخستین چیزی که محاسبه می کنیم، تعداد ذرات است. البته به طور دقیق تر باید بگوییم متوسط تعداد ذرات چون که در آنرا میل گراندکانونیک تعداد ذرات ثابت نیست و افت و خیز می کند، اما از آنجا که میزان افت و خیز کم است به جای متوسط ذرات یعنی  $\bar{N}$  همان نماد  $N$  را به کار می بریم. بدست می آوریم:

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Q = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} + 1} = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (5)$$

سپس انرژی را حساب می کنیم:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q = \sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (6)$$

و بالاخره از روابط آنرا میل گراندکانونیک می دانیم که

$$\frac{PV}{kT} = \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_i}). \quad (7)$$

سه معادله فوق به طور ضمنی همه اطلاعات لازم در باره یک سیستم فرمیونی را بدست می دهند. تنها نکته مشکل این است که می بایست پارامتر  $z$  را بین این معادلات حذف کرد تا بتوان به روابط صریحی برای انرژی و معادله حالت بر حسب تعداد ذرات رسید. به عبارت بهتر می بایست از رابطه (۵) پارامتر  $z$  را بر حسب تعداد ذرات یعنی  $N$  بدست آورد و سپس این پارامتر را در دو معادله دیگر یعنی معادله انرژی و فشار قرار داد تا به

<sup>۱</sup> Degeneracy Pressure

معادله حالت و معادله انرژی رسید. با توجه به فرم این معادلات این کار به صورت صریح ممکن نیست. اما در دمای صفر می توان این محاسبات را به صورت دقیق انجام داد و این کاری است که در ادامه این درس انجام خواهیم داد. قبل از آن نیز می توانیم به فهم بعضی خواص و روابط کلی بسنده کنیم. مطالعه گاز فرمی در دمای غیر صفر را به درس های آینده موکول می کنیم. از رابطه (۵) می توان نتیجه گرفت که متوسط تعداد ذرات در هر تراز انرژی برابر است با:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (۸)$$

این تعبیر با رابطه (۶) نیز تایید می شود. زیرا این رابطه نشان می دهد که میزان انرژی کل برابر است با تعداد ذرات در هر تراز انرژی ضرب در انرژی همان تراز. از آنجا که کمیت های ترمودینامیکی همه به صورت ضمنی بر حسب پارامتر  $z$  نوشته می شوند، مهم است که محدوده این پارامتر را تعیین کنیم.

■ **محدوده پارامتر  $z$  برای فرمیون ها:** نخست دقت می کنیم که با توجه به تعریف  $z = e^{\beta\mu}$  و حقیقی بودن پتانسیل شیمیایی،  $z$  همواره یک پارامتر حقیقی و مثبت است. حال برای فرمیون ها با توجه به اینکه  $0 \leq \bar{n}_i \leq 1$  نتیجه می گیریم که محدوده تغییرات  $z$  برای فرمیون ها ناحیه زیر است:

$$0 \leq z < \infty.$$

توزیع (۸) به توزیع فرمی-دیراک موسوم است. نخست شکل این تابع توزیع را در دمای صفر بدست می آوریم. از رابطه (۸) می فهمیم که

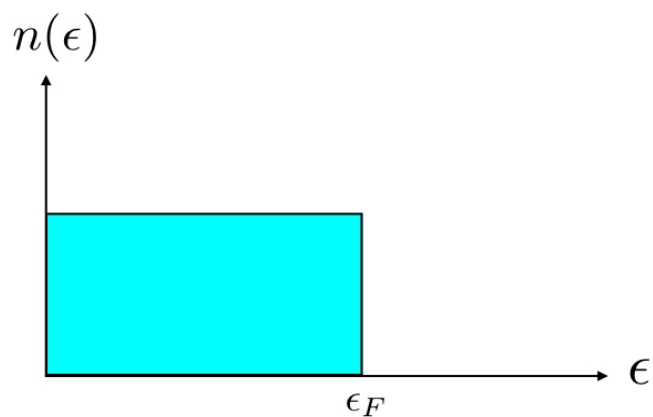
$$n_i = \begin{cases} 1, & \epsilon_i < \mu, \\ 0, & \epsilon_i > \mu \end{cases} \quad (۹)$$

بنابراین تمام ترازهای انرژی کمتر از  $\mu$  پر و همه ترازهای انرژی بالاتر از  $\mu$  پر هستند، شکل (۱). دقت کنید که پتانسیل شیمیایی با توجه به رابطه (۵) وابسته به چگالی و دماست. در دمای صفر پتانسیل شیمیایی را انرژی فرمی<sup>۲</sup> می خوانیم و آن را با  $\epsilon_F$  نشان می دهیم. در بخش بعدی مقدار انرژی فرمی را محاسبه می کنیم. فعلا می دانیم که

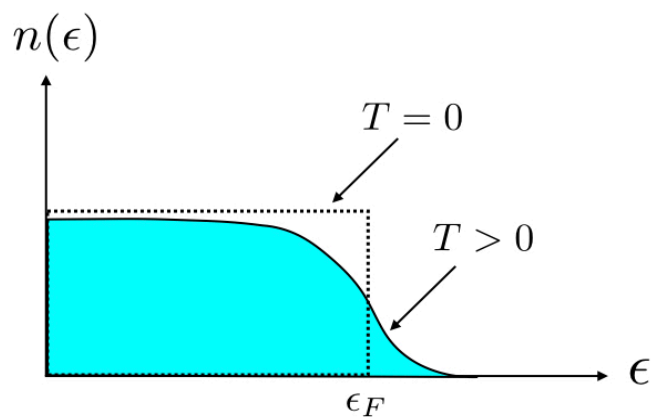
$$\epsilon_F := \mu(T = 0).$$

دما که زیاد می شود ذراتی که در لایه های نزدیک سطح فرمی هستند با گرفتن انرژی گرمایی به بالای سطح فرمی می روند و تابع توزیع به شکل (۲) در می آید. باید دقت کنید که در دمای بالاتر از صفر دیگر  $\mu$  برابر با  $\epsilon_F$  نیست، بلکه  $\mu$  و در نتیجه  $z$  کوچک تر می شود. از رابطه ی

<sup>۲</sup>Fermi Energy



شکل ۱: توزیع فرمی دیراک در دمای صفر: تمام ترازهای زیر سطح فرمی پر و بالای سطح فرمی خالی هستند.



شکل ۲: توزیع فرمی دیراک در دمای کمی بالاتر از صفر: ذرات لایه های نزدیک و زیر سطح فرمی را ترک کرده و به لایه های بالای سطح

فرمی می روند. از رابطه (۸) معلوم می شود که در همه دما ها  $n(\epsilon_i = \mu) = \frac{1}{2}$ .

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

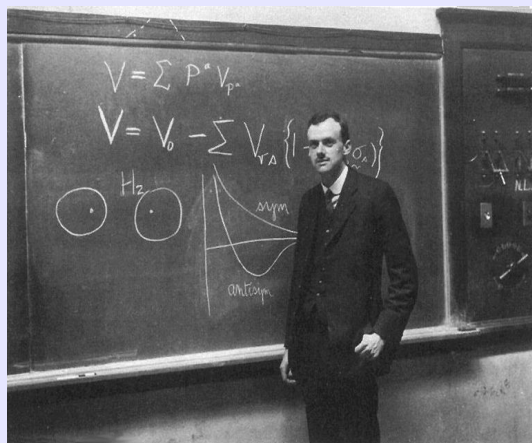
می دانیم که  $\mu$  یا پتانسیل شیمیایی، میزان انرژی مورد نیاز برای افزودن یک ذره به یک سیستم در حجم و انتروپی ثابت است. در دمای صفر اگر بخواهیم یک ذره به گاز اضافه کنیم می بایست این ذره را درست در یک تراز بالاتر از سطح فرمی قرار دهیم و به همین جهت احتیاج به انرژی  $\epsilon_F$  داریم. یعنی  $\mu(T=0) = \epsilon_F$ . دما که بالاتر می رود تعدادی از سطوح انرژی زیر سطح فرمی خالی می شود و این امکان پدید می آید که بتوانیم یک ذره را در این سطوح خالی شده قرار دهیم بدون این که حجم یا انتروپی تغییر کند. به همین دلیل است که

$$\mu(T > 0) < \epsilon_F.$$

می توان یک دما موسوم به دمای فرمی تعریف کرد که از رابطه

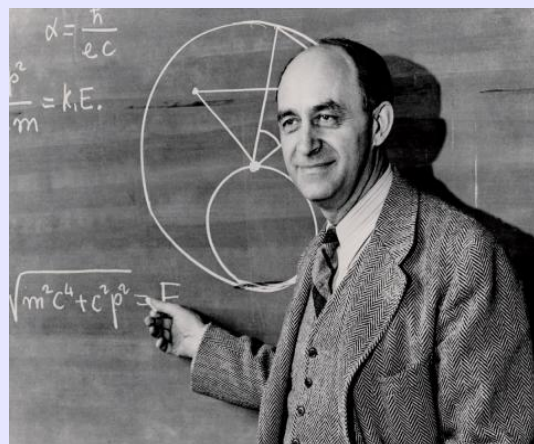
$$T_F := \frac{\epsilon_F}{k} \quad (10)$$

بدست می آید. هرگاه که  $T < T_F$  باشد، معنی اش این است که افت و خیزهای حرارتی قادر نیستند که ترازهای پایین انرژی را خالی کنند و به بالای سطح فرمی ببرند. بنابراین در این دما تنها جمعیت لایه های نزدیک سطح فرمی تغییر می کند. اما وقتی که  $T \approx T_F$  یا  $T \gtrsim T_F$  است، انرژی حرارتی آنقدر بزرگ می شود که حتی ذرات موجود در لایه های پایین انرژی تحریک شده و به بالای سطح فرمی می روند. بنابراین وقتی که گاز رقیق می شود و در نتیجه رفتار کلاسیک پیدا می کند، جمله 1 در مقایسه با  $z^{-1}e^{\beta\epsilon_k}$  قابل صرف نظر کردن است و تابع احتمال به فرم بولتزمن یعنی  $e^{-\beta\epsilon_k}$  نزدیک می شود.



شکل ۳: پاول آدرین موریس دیراک (۱۹۰۲-۱۹۸۴)

پاول آدرین موریس دیراک (Paul Maurice Adrien Dirac) فارغ التحصیل مهندسی برق بود، اما چون شغلی بدست نیاورد به فیزیک نظری روی آورد و یکی از بزرگ‌ترین فیزیکدانان نظری قرن بیستم شد که سهم بزرگی در بنیان‌گذاری مکانیک کوانتومی و الکترودینامیک کوانتومی ایفا کرد. دیراک شخصیتی آرام، دقیق و به طرز غیرمعمولی کم‌حرف بود، تا جایی که همکارانش سبک سخن گفتن او را به فرمول‌بندی‌های مختصر و روشن در ریاضیات تشبیه می‌کردند. در باره کم حرفی او داستان‌های بسیاری بر سر زبان‌هاست که می‌توان در زندگی‌نامه‌های او دنبال کرد. او پس از فرمی فرمول‌بندی دقیقی از آمار ذرات با اسپین نیمه صحیح ارائه داد به همین دلیل است که امروزه توزیع آماری این گونه ذرات، آمار فرمی-دیراک نامیده می‌شود. علاوه بر این او به خاطر دستاوردهای خیلی مهم دیگرش شناخته می‌شود. او بود که شکل نسبیتی معادله شرودینگر را که امروزه معادله دیراک نامیده می‌شود، ارائه داد و گام مهمی را در تلفیق نسبیت خاص با مکانیک کوانتومی برداشت. او کاشف مفهوم پادذره و از معماران نظریه میدان‌های کوانتومی است. در سال ۱۹۳۳، دیراک همراه با اروین شرودینگر به دلیل مشارکت‌های بنیادی در مکانیک کوانتومی، برنده جایزه نوبل فیزیک شد. او یکی از جوان‌ترین برندگان این جایزه بود. دیراک نه تنها یکی از بنیان‌گذاران مکانیک کوانتومی بود، بلکه شیوه‌ای زیبا و ریاضی‌وار را در فرمول‌بندی قوانین طبیعت دنبال می‌کرد. جمله معروف او که بیانگر سبک فکری‌اش بود، این است: ”یک معادله باید از نظر ریاضی زیبا باشد.“



شکل ۴: انریکو فرمی (۱۹۰۱-۱۹۵۴)

انریکو فرمی بلافاصله پس از اعلام اصل طرد پائولی و در ۲۴ سالگی مقاله معروف خود در باره آمار ذرات یکسان نوشت. در همان سال نیز به استادی فیزیک در دانشگاه رم رسید، شغلی که پس از رقابت خیلی فشرده در سرتاسر ایتالیا می‌توانست نصیب یک فیزیکدان برجسته

شود. او بدون شک یکی از بزرگترین فیزیکدان های قرن بیستم و شاید آخرین فیزیکدان تمام دوران ها باشد که به یکسان در فیزیک نظری و فیزیک تجربی به نقطه اوج رسیده است. او را معمار عصر هسته ای می دانند و نامش با بسیاری دیگر از کشفیات مهم در فیزیک پیوند خورده است: آمار فرمی دیراک، ذرات فرمیون، رادیواکتیویته القایی، عنصر فرمیوم، راکتورهای هسته ای، و کشفیات بی شمار دیگر در فیزیک و البته معلمی بی همتا که هشت تن از دانشجویان او برنده جایزه نوبل شدند. اما شاید غم انگیز ترین موضوع در باره فرمی مرگ زود هنگام اوست، آن هم در پنجاه و سه سالگی. تنها می توان تصور کرد که اگر فرمی به هشتاد و یا نود سالگی می رسید چه تحولات شگرفی می توانست در فیزیک ایجاد کند. اما زندگی او مثل همه مردان بزرگ دیگر ذخیره ای بی پایان از نیروی معنوی و الهام برای دانشجویان و پژوهشگران است، در سادگی و امید و در ظرفیت عظیم برای غلبه بر درد و رنج.

سی ان یانگ گفته است به همراه مورای گلزمان به شیکاگو رفتیم تا در بیمارستان بیلینگز از انریکو فرمی که به سختی مریض شده بود دیدن کنیم. وقتی وارد اتاق شدیم داشت کتابی می خواند در باره اینکه چگونه مردان بزرگ با نیروی اراده توانسته اند بر موانع طبیعی و بداقبالی ها غلبه کنند. خیلی نحیف و تکیده و تنها اندکی اندوهگین بود. به آرامی گفت که دکترها گفته اند چند روز بعد از بیمارستان مرخص می شود ولی تنها چندماه برای زندگی وقت دارد. بعد به دست نوشته کنار تخت اش اشاره کرد و گفت یادداشت های کتابی است که در باره فیزیک هسته ای می نویسد و می خواهد در فاصله دوماهی که وقت دارد آخرین اصلاحات را در آن انجام داده و برای انتشار آماده اش کند. من و مورای چنان از این شوق او تکان خوردیم که نتوانستیم به چهره اش نگاه کنیم و ساکت ماندیم. تنها سه هفته بعد انریکو فرمی از دنیا رفت بدون آنکه فرصت پیدا کند کتابش را تمام کند. تنها نشانه مقبره او سنگ کوچکی است در گورستان اوک ریج در شیکاگو، که روی آن به سادگی تمام نوشته شده:

انریکو فرمی- فیزیکدان- ۱۹۰۱-۱۹۵۴.





شکل ۵: سنگ مزار انریکو فرمی در گورستان شیکاگو

## ۱.۲ ترمودینامیک گاز فرمی در دمای صفر

حال که اصول کلی را یادگرفته ایم می توانیم گاز فرمی ایده آل را در دمای صفر کمی بیشتر مطالعه کنیم. منظور از گاز فرمی ایده آل گازی از اتم ها یا مولکولهای بدون برهم کنش است که تنها تحت تاثیر اصل طرد پاولی قرار دارند. این اتم ها فرمیون هستند (مثل گاز الکترونی درون فلز یا یک گاز هلیوم ۳ یا گاز نوترونی درون یک ستاره نوترونی). اگرچه این اتم ها اسپین دارند ولی برای سادگی درجه آزادی اسپینی آنها را نادیده می گیریم. به عبارت دیگر فرض می کنیم که این درجه آزادی افت و خیز گرمایی ندارد. در آخر اگر ذرات گاز اسپین  $z$  داشته باشند، می توانیم جمعیت همه ترازهای انرژی را در عدد  $2z + 1$  ضرب کنیم تا جمعیت همه ذرات را با در نظر گرفتن درجه آزادی اسپین ها بدست آوریم. اکنون مسئله ما این است که در روابط (۵) تا (۷) انرژی های یک ذره آزاد را قرار دهیم و جمع ها را تبدیل به انتگرال کرده و آنها را محاسبه کنیم. نخست توجه می کنیم که ترازهای انرژی یک ذره برابر است با:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \quad (11)$$

که در آن

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$$

بنابراین می توانیم برای هر تابع همواری بنویسیم:

$$\sum_i f(\epsilon_i) = \sum_{n_x, n_y, n_z} f(\epsilon_{n_x, n_y, n_z}) = \frac{1}{8} \int d^3k f(\epsilon_{\mathbf{k}}) \frac{L^3}{\pi^3} \quad (12)$$

که در آن ضریب  $\frac{1}{8}$  برای این ضرب شده که می بایست فقط روی تکانه های مثبت انتگرال بگیریم. بنابراین با توجه به این که  $\epsilon_k$  فقط تابع اندازه  $k$  است، خواهیم داشت:

$$\sum_i f(\epsilon_i) = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk f(\epsilon_k) \quad (۱۳)$$

بنابراین روابط (۵) تا (۷) به صورت انتگرال های زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} N &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_k} + 1} \\ U &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\epsilon_k}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_k} + 1} \\ \frac{PV}{kT} &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \ln(ze^{-\beta\epsilon_k} + 1). \end{aligned} \quad (۱۴)$$

اگر توجه خود را به انتگرال سوم معطوف کنیم می توانیم با انتگرال گیری جزء به جزء کاری کنیم که یک نتیجه کلی و زیبا بدست آوریم. برای این کار توجه می کنیم که:

$$\int_0^\infty k^2 dk \ln(ze^{-\beta\epsilon_k} + 1) = \frac{1}{3}(k^3) \ln(ze^{-\beta\epsilon_k} + 1) \Big|_{k=0}^\infty - \frac{1}{3} \int k^3 dk \frac{d}{dk} \ln(ze^{-\beta\epsilon_k} + 1) \quad (۱۵)$$

با کمی دقت به حدود بالا و پایین انتگرال می توانیم طرف راست را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k^2 dk \ln(ze^{-\beta\epsilon_k} + 1) &= 0 - \frac{1}{3} \int k^3 dk \frac{d}{dk} \ln(ze^{-\beta\epsilon_k} + 1) \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\epsilon_k z^{\beta} e^{-\beta\epsilon_k}}{ze^{-\beta\epsilon_k} + 1} \\ &= \frac{2}{3kT} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\epsilon_k}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_k} + 1}. \end{aligned} \quad (۱۶)$$

به این ترتیب با مقایسه این رابطه با رابطه سوم از (۱۴) به این نتیجه می رسیم که:

$$PV = \frac{2}{3}U. \quad (۱۷)$$

یعنی همواره بین انرژی داخلی و فشار و حجم، این رابطه مستقل از چگالی ذرات و در هر دمایی برقرار است. در درس های بعدی یاد خواهیم گرفت که از این روابط استفاده کنیم و در دمای دلخواه روابط ترمودینامیکی گاز فرمی را بدست آوریم. این کار نیاز به محاسبات نسبتاً مفصلی

دارد. بنابراین در این بخش توجه خود را به دمای صفر معطوف کنیم. که محاسبات مربوط به آن ساده است. با توجه به توزیع فرمی دیراک در دمای صفر یعنی رابطه (۹) و توجه به اینکه در دمای صفر  $\mu \equiv \epsilon_F$ ، روابط مربوط به تعداد ذرات و انرژی به صورت انتگرال های زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} N &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\epsilon_F} k^2 dk \\ U(T=0) &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon_k k^2 dk. \end{aligned} \quad (18)$$

می توانیم انرژی فرمی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

در نتیجه

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{V}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{V}{6\pi^2} \left( \frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (19)$$

و

$$U = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \epsilon_k k^2 dk = \frac{V}{10\pi^2} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) k_F^5 = \frac{V}{10\pi^2} \left( \frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{5}{2}} \epsilon_F. \quad (20)$$

رابطه اول انرژی فرمی را بر حسب چگالی گاز تعیین می کند:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \quad (21)$$

که در آن  $n = \frac{N}{V}$  چگالی گاز است. به این ترتیب هر چه که گاز چگال تر باشد، انرژی فرمی بالا و بالاتر می رود. چگونگی این افزایش البته بستگی به بعد فضایی یعنی  $d$  دارد. بدون محاسبه نیز می توانیم این بستگی را پیدا کنیم. این کاری است که کمی بعد با استفاده از آنالیز ابعادی انجام خواهیم داد.

با تقسیم این دو رابطه آخری بر هم بدست می آوریم:

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F. \quad (22)$$

این که برخلاف گاز کلاسیک، گاز فرمی در دمای صفر نیز دارای انرژی است و از اصل هم پاری انرژی تبعیت نمی کند، ناشی از کوانتومی بودن آن و اصل طرد پاولی است که اجازه نمی دهد همه ذرات به حالت پایه بروند. برای بدست آوردن فشار در دمای صفر رابطه (۷) را در نظر می

گیریم: در دمای صفر از این رابطه حدی استفاده می کنیم که

$$\ln(ze^{-\beta\epsilon_k} + 1) = \begin{cases} \frac{\epsilon_F - \epsilon}{kT}, & \epsilon < \epsilon_F \\ 0, & \epsilon_F > \epsilon \end{cases} \quad (23)$$

در نتیجه

$$\frac{PV}{k_B T} = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\epsilon_F} k^2 dk \frac{\epsilon_F - \epsilon}{k_B T} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^{k_F} k^2 dk \frac{k_F^2 - k^2}{k_B T} \quad (24)$$

■ **تمرین:** با محاسبه انتگرال و ساده کردن نتیجه نهایی نشان دهید که فشار گاز فرمی برابر خواهد بود با:

$$P = \frac{1}{15\pi^2} \left( \frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \epsilon_F \quad (25)$$

هم چنین نشان دهید که رابطه ساده زیر بین فشار و انرژی داخلی گاز برقرار است:

$$PV = \frac{2}{5} U. \quad (26)$$

در درسهای آینده خواهیم دید که این رابطه (که در این درس برای دمای صفر بدست آوردیم) در واقع در همه دماها برقرار است.

■ **آنالیز ابعادی برای گاز فرمی:** یکی از اولین و مهم ترین کارها برای حل هر مسئله ای این است که قبل از هر نوع محاسبه ای با آنالیز

ابعادی بستگی کمیت های مورد نظر خود را به کمیت های بنیادی تر پیدا کنیم. این نوع مطالعه بینش شهودی عمیقی را نیز برای ما فراهم می کند. البته در این جا تنها به دلایل آموزشی نخست محاسبه دقیق انجام دادیم و اکنون آنالیز ابعادی انجام می دهیم. <sup>۳</sup> اگر نگران ضرایب دقیق عددی نباشیم، می توانیم روابط چگالی، انرژی و فشار را بر حسب انرژی فرمی تنها با استدلال ابعادی بدست آوریم. یک گاز فرمیونی ایده آل را در بعد  $d$  در نظر بگیرید که جرم اتم های آن  $m$  است و در حجم  $V$  قرار دارد. چگالی نیز برابر است با  $n = \frac{N}{V}$ . با استفاده از این که این گاز کوانتومی است و ثابت پلانک در روابط آن وارد می شود با استدلال ابعادی، می توانیم انرژی فرمی این گاز و سپس انرژی کل و فشار آن را در دمای صفر بدست آوریم. ابعاد کمیت هایی که در اختیار داریم اینها هستند:

$$[m] = M \quad [n] = [V^{-1}] = L^{-d}, \quad [\hbar] = ML^2 T^{-1}. \quad (27)$$

<sup>۳</sup> برای کسانی که علاقمند به یادگرفتن عمیق و وسیع آنالیز ابعادی در زمینه های مختلف هستند دو منبع زیر منابع ارزشمندی هستند:

یک - سلسله درسهای دکتر **امیر آقامحمدی** در کانال یوتیوبی او که شامل موضوعات دیگر هم هست.

دو - کتاب *Qualitative Methods in Quantum Theory*, by Arkady Migdal.

بعد انرژی فرمی مثل هر انرژی دیگری برابر است با

$$[\epsilon_F] = ML^2T^{-2}. \quad (28)$$

بنابراین قرار می دهیم:

$$\epsilon_F \sim m^\alpha n^\beta \hbar^\gamma \quad (29)$$

و در نتیجه از نظر ابعادی تساوی زیر بدست می آید:

$$ML^2T^{-2} = M^\alpha L^{-d\beta} (ML^2T^{-1})^\gamma. \quad (30)$$

با مساوی قرار دادن دو طرف بدست می آوریم:

$$\alpha = -1, \quad \beta = \frac{2}{d}, \quad \gamma = 2 \quad (31)$$

و در نتیجه

$$\epsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{2}{d}} = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{d}} \quad (32)$$

البته از ابتدا اگر کمی شهود فیزیکی به کار می بردیم می توانستیم زودتر بفهمیم که  $\epsilon_F$  می بایست از نوع  $\epsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{2m} k^2$  باشد که در آن  $k$  کمیتی از جنس  $L^{-1}$  است و بلافاصله به رابطه (32) برسیم. پس از یافتن انرژی فرمی طبیعتاً انرژی کل برابر خواهد بود با:

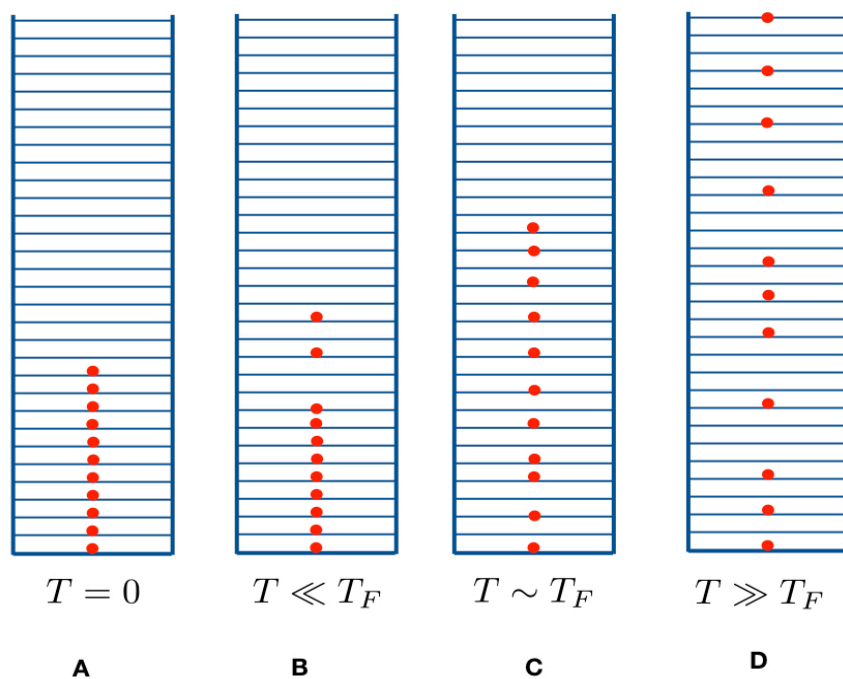
$$U \sim N\epsilon_F \sim N \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{2}{d}} \quad (33)$$

و فشار نیز برابر خواهد بود با

$$P \sim \frac{U}{V} \sim \frac{N}{V} \epsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{m} n^{\frac{2}{d}+1}. \quad (34)$$

آنچه که بدست آوردیم نشان می دهد که بر خلاف گاز ایده آل کلاسیک که فشار متناسب با چگالی است، در گاز فرمی فشار متناسب با توانی از چگالی است و این توان البته بستگی به بعد دارد. در سه بعد و در دمای صفر فشار متناسب با توان  $\frac{2}{3}$  چگالی است. هم چنین وجود ثابت پلانک در این رابطه مهم است که نشان می دهد این فشار ناشی از یک اثر کوانتومی است. این فشار در دمای صفر ناشی از اصل طرد پاولی است که باعث می شود الکترون ها به یکدیگر نزدیک نشوند. این فشار همان عاملی است که در ستاره ها وقتی که سوخت آنها تمام می شود و اتم ها در

اثر گرانش در هم کوبیده می شوند مانع فشرده شدن بیشتر اتم ها و تشکیل ستاره نوترونی می شود. برای تشکیل یک ستاره نوترونی جرم ستاره می بایست از یک حد مشخص بیشتر باشد تا بتواند بر این فشار دافعه که آن را فشار واگنی الکترونی<sup>۴</sup> می نامیم غلبه کند. یک بار دیگر به صورت کیفی وضعیت یک گاز فرمی را بررسی می کنیم. در دمای  $T = 0$  همه لایه های زیر انرژی فرمی پر و لایه های بالاتر از آن خالی هستند. در دماهایی که از دمای فرمی خیلی پایین ترند، میزان انرژی گرمایی فقط آن اندازه است که بتواند ترازهای نزدیک سطح فرمی را خالی کرده و ذرات این تراز ها را به لایه های بالاتر بفرستد. وقتی که دما به حدود دمای فرمی نزدیک می شود، (که همان طور که می دانیم خودش دمای زیادی است) انرژی گرمایی آنقدر هست که تقریباً همه تراز های زیر سطح فرمی را تحت تاثیر قرار دهد و ذرات را از این تراز ها جابجا کند و به تراز های بالاتر ببرد اما هر چه که هست بالاترین تراز که به این ترتیب ممکن است پر شود تراز است با انرژی نزدیک  $2E_F$ . اما وقتی که دما خیلی بزرگ تر از دمای فرمی است، نه تنها همه ذرات در زیر سطح فرمی جابجا شده اند بلکه این ذرات در تمام تراز های بالاتر پخش شده اند و چگالی تعداد ذرات در تراز ها خیلی پایین تر از یک است. این وضعیت ها در شکل (۶) نشان داده شده اند.



شکل ۶: توزیع ذرات در لایه های انرژی در دماهای مختلف.

<sup>۴</sup>Electron Degeneracy Pressure

### ۳ تابع پارش گاز بوزونی و چگالش بوز-اینشتین

در این بخش تابع پارش گاز بوزونی را به صورت دقیق تر مطالعه می کنیم و توجه خود را به یک پدیده خاص معطوف می کنیم که به چگالش بوز-اینشتین<sup>۵</sup> معروف است. مطالعه وسیع تر گاز بوزونی را در دماهای مختلف به درس های آینده واگذار می کنیم. در اثر چگالش بوز-اینشتین کسر قابل توجهی از کل ذرات یعنی تعداد ماکروسکوپی از ذرات در حالت پایه جمع یا به اصطلاح چگالیده می شوند. این پدیده در دماهای بسیار کم یا چگالی های بسیار زیاد آنهم فقط برای بوزون ها رخ می دهد و منشاء پدیده هایی مثل ابرشارگی و ابرسانایی است. از نظر کیفی، به صورت خیلی ابتدایی می توان این پدیده را به این شکل توضیح داد که قبل از چگالش، پخش شدن ذرات در تراز های مختلف که هرکدام تکانه و انرژی مخصوص به خود دارند، باعث برخوردها و پراکندگی ذرات از یک دیگر و در نتیجه باعث بروز مزاحمت و ویسکوزیته در مایعات و یا مقاومت الکتریکی در رساناهای معمولی می شود. ولی بعد از چگالش، جمع شدن انبوهی از ذرات در یک حالت پایه با انرژی و تکانه معین باعث رفتار جمعی و یکسان ذرات و در نتیجه از بین رفتن ویسکوزیته در مایعات یا مقاومت الکتریکی در ابررساناها می شود، شکل (۷). باید دقت کرد که در یک ابررسانا، الکترون ها که فرمیون هستند، دو به دو تشکیل جفت هایی موسوم به جفت های کوپر<sup>۶</sup> می دهند و این جفت های کوپر هستند که نهایتاً چگالیده شده و باعث ابرسانایی می شوند. به طور کیفی می توان گفت که رفتار انبوه ذرات قبل از چگالش مثل یک گاز و بعد از چگالش مثل یک مایع است. این تفاوت در تمام کیفیات این دستگاه بس ذره ای نظیر تراکم پذیری، ظرفیت گرمایی ویژه و نظایر آن دیده می شود.

نخست روابط کلی مربوط به بوزون ها را یادآوری می کنیم. داریم:

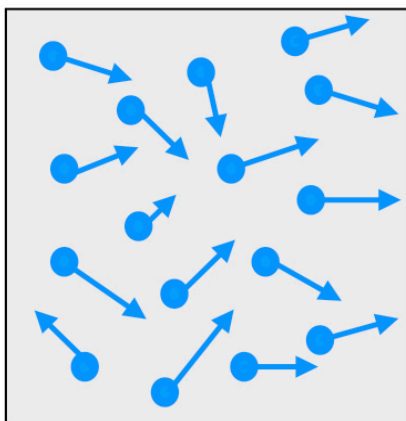
$$\ln Q = - \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (۳۵)$$

$$N = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad (۳۶)$$

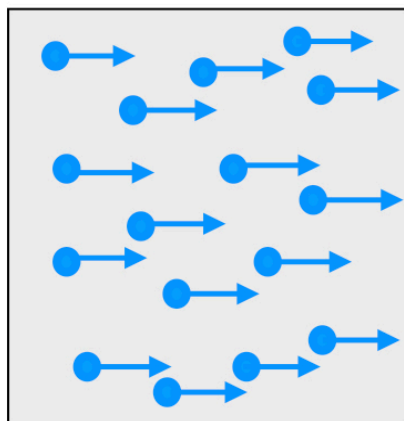
$$U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad (۳۷)$$

---

Bose-Einstein Condensation<sup>۵</sup>  
Cooper Pairs<sup>۶</sup>



قبل از چگالش بوزونی



بعد از چگالش بوزونی

شکل ۷: چگالش بوزون ها در حالت پایه باعث می شود که همه ذرات یک سیستم اعداد کوانتومی و حالت یکسان داشته باشند. در چنین شرایطی هر نوع تداخل بین حرکت ذرات از بین می رود. این خاصیت باعث بروز پدیده هایی مثل ابرشارگی و ابرسانایی می شود.

نخست محدوده پارامتر  $z$  را تعیین می کنیم.

■ **محدوده پارامتر  $z$  برای بوزون ها:** اگر به عبارت (۳۶) نگاه کنیم متوجه می شویم که تعداد ذرات در هر تراز انرژی برابر است با:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad \text{از آنجا که } 0 \leq n_i \leq \infty \text{ بدست می آوریم که}$$

$$0 \leq z < e^{\beta\epsilon_i} \quad \forall i$$

و در نتیجه

$$0 \leq z < e^{\beta\epsilon_0},$$

که در آن  $\epsilon_0$  انرژی حالت پایه است. همواره می توانیم با کاستن یک مقدار ثابت از هامیلتونی، انرژی حالت پایه را برابر با صفر بگیریم



(کاری که در این درس انجام خواهیم داد) و در نتیجه برای بوزون ها محدوده  $z$  عبارت است از:

$$0 \leq z < 1. \quad (38)$$

پس از تعیین محدوده  $z$  به سراغ محاسبه کمیت های دیگر می رویم. برای گاز ایده آل،  $\epsilon_i$  ها عبارتند از سطوح انرژی یک ذره درون یک چاه پتانسیل که ابعاد آن را  $L$  می گیریم. هرگاه حجمی را که ذره در آن قرار دارد یک مکعب  $d$  بعدی بگیریم و شرایط مرزی را نیز طوری بگیریم که تابع موج روی دیواره ها صفر باشد، خواهیم داشت:

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_d^2). \quad (39)$$

در ضمیمه این درس نشان داده ایم که چگونه می توان جمع های بالا را به انتگرال تبدیل کرد. با طی کردن این مراحل و استفاده از یک متغیر جدید  $x = \beta \epsilon$  به رابطه زیر می رسم:

$$\ln Q = -\frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx. \quad (40)$$

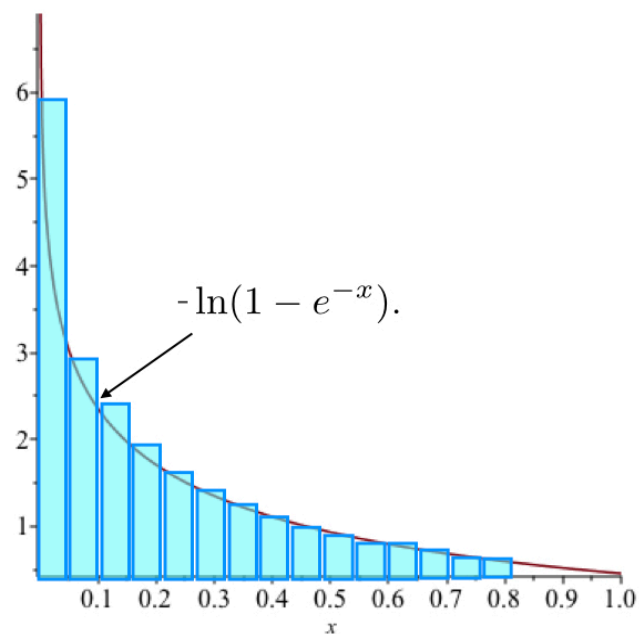
اما این رابطه یک اشکال اساسی دارد که اینک آن را توضیح داده و رفع می کنیم.

در عبارت (35) سهم جمله حالت پایه به صورت

$$-\ln(1 - z) \quad (41)$$

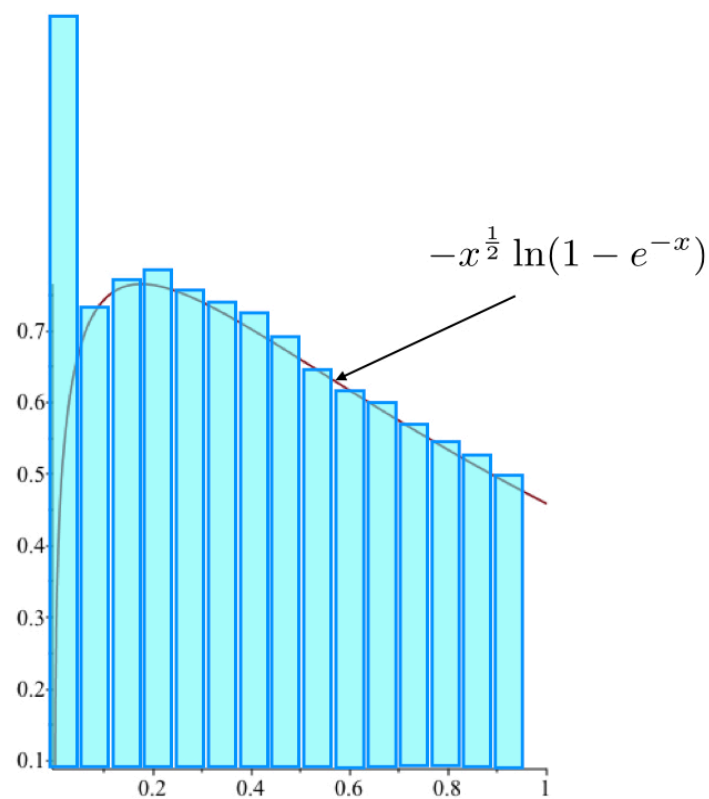
است. همانطور که در ابتدا گفتیم انرژی حالت پایه را  $\epsilon_0 = 0$  گرفته ایم. وقتی که  $z$  به سمت 1 میل می کند، این جمله به سمت بی نهایت میل می کند. ببینیم آیا این سهم در انتگرال (40) در نظر گرفته شده است یا خیر؟ اگر به عبارت  $x^{\frac{d}{2}-1}$  که در واقع نشان دهنده چگالی حالت ها در واحد انرژی است، نگاه کنیم متوجه می شویم که برای  $d > 2$  این چگالی به سمت صفر و در نتیجه جمله  $x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - e^{-x})$  نیز به سمت صفر میل می کند و در نتیجه روشن است که عبارت واقعی (35) با انتگرال (40) در این نقطه تفاوت فاحشی دارد. دلیل این امر هم روشن است. اگر به شکل های (8) و (9) نگاه کنیم متوجه نکته اصلی می شویم.

قرار است سطح زیر منحنی که همان انتگرال (40) است جایگزین جمع (35) شود که همان مجموع مساحت میله های عمودی آبی است. در شکل (8) که مربوط به بعد  $d = 2$  است، هر دو مساحت با تقریب خیلی خوبی یکسان هستند. اما در شکل (9) که مربوط به بعد  $d = 3$  است، می بینیم که منحنی در  $x$  های کوچک به سمت صفر میل می کند و حال آنکه ارتفاع میله روی آن سر به فلک می کشد. در واقع مساحت سطح زیر منحنی در اینجا یک مقدار محدود است. در واقع هر چه تفاوت هست توسط همان میله اول یعنی سهم حالت پایه ایجاد می شود. دلیل این تفاوت

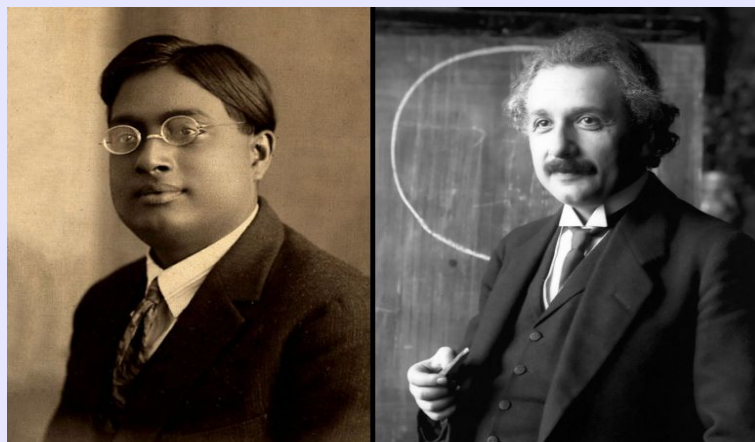


شکل ۸: در بعد دو وقتی که  $z$  به ۱ نزدیک می شود، تفاوتی بین جمع گسسته روی حالت های انرژی و انتگرال پیوسته این مقادیر وجود ندارد. .

آن است که تبدیل یک جمع به یک انتگرال فقط وقتی صحیح است که جملات متوالی جمع نسبت به هم تفاوت شان اندک باش به طوری که بتوان آنها را با یک تابع هموار تقریب زد. در این جا سهم حالت پایه با بقیه حالت ها تفاوت بسیار زیادی دارد.



شکل ۹: در بعد سه وقتی که  $z$  به یک نزدیک می شود، جمع گسسته روی حالت ها بی نهایت می شود ولی انتگرال پیوسته مقدار محدودی دارد. تفاوت عمده هم فقط در سهم حالت پایه است که می بایست جدا نوشته شود.



شکل ۱۰: آلبرت اینشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵) و ساتیندرا نات بوز (۱۸۹۴-۱۹۷۴).

در سال ۱۹۲۴، ساتیندرا نات بوز<sup>۷</sup>، فیزیک‌دان هندی، مقاله‌ای نوشت که در آن شیوه‌ای نو برای شمارش حالت‌های ممکن فوتون‌ها در تابش جسم سیاه ارائه می‌داد. بوز در این مقاله با استفاده از روش‌های آماری بدون تکیه بر مفاهیم کلاسیکی، رابطه پلانک را بازتولید کرد. او مقاله‌اش را ابتدا برای چاپ به یک ژورنال محلی فرستاد که پذیرفته نشد. در نتیجه بوز این مقاله را مستقیماً برای آلبرت اینشتین فرستاد. اینشتین که از نوآوری بوز بسیار تحت تأثیر قرار گرفته بود، نه تنها مقاله را به آلمانی ترجمه کرد، بلکه آن را با توصیه خود در «مجله ای برای فیزیک»<sup>۸</sup> منتشر کرد. <sup>۹</sup> بعد از آن، اینشتین این ایده را گسترش داد و در مقاله‌ای در سال ۱۹۲۴ و سپس ۱۹۲۵، آن را به گازهای ماده (ذرات با جرم، نه فقط فوتون) تعمیم داد. نتیجه‌ی این کار، پایه‌گذاری آمار بوز-اینشتین و پیش‌بینی چگالش بوز-اینشتین<sup>۱۰</sup> حالتی کوانتومی از ماده که در آن تعداد زیادی از ذرات بوزونی در پایین‌ترین حالت انرژی جمع می‌شوند و منشاء پدیده‌هایی مثل ابرسانایی و ابرشارگی است.

Satyendra Nath Bose<sup>۷</sup>

Zeitschrift für Physik<sup>۸</sup>

<sup>۹</sup> در آن سالها این مجله مهم ترین مجله تخصصی فیزیک بوده است، بسیاری از مقالات دوران ساز فیزیک مثل مقاله های اینشتین در ۱۹۰۵ و بعدها مقالات هایزنبرگ و شرودینگر در این مجله چاپ شدند. اکنون این مجله دیگر آن جایگاه گذشته اش را ندارد.

<sup>۱۰</sup> Bose-Einstein condensation

سوال مهمی که در این جا پیش می‌آید این است که آیا تنها سهم حالت پایه است که در انتگرال (۴۰) نادیده گرفته شده یا این که مثلاً سهم اولین و دومین و سومین حالت برانگیخته نیز از قلم افتاده است؟ برای پاسخ به این سوال بهتر است که سهم اولین حالت برانگیخته را با سهم حالت پایه

مقایسه کنیم. انرژی حالت پایه را با  $\epsilon_0 = 0$  و انرژی حالت برانگیخته اول را با  $\epsilon_1$  نشان می دهیم. از رابطه (۳۹) روشن است که

$$\epsilon_1 - \epsilon_0 \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (۴۲)$$

حال سهم این دو جمله در  $Q$  برابر است با:

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) - \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_1}). \quad (۴۳)$$

از درس های قبلی دیده ایم که محدوده مجاز  $z$  برابر است با  $[0, e^{\beta\epsilon_0}]$  یعنی  $0 \leq z \leq e^{\beta\epsilon_0}$ . بنا بر این بیشترین مقداری که سهم اولین حالت برانگیخته یعنی جمله دوم می تواند اختیار کند برابر است با :

$$-\ln(1 - e^{\beta(\epsilon_0 - \epsilon_1)}) \approx -\ln(\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0)) \approx -\ln\left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \beta\right). \quad (۴۴)$$

حتی اگر عدد داخل پرانتز به کوچکی  $10^{-100}$  یا  $10^{-200}$  باشد، باز لگاریتم آن عددی در حدود ۱۰۰ یا ۲۰۰ است و این در حالی است که جمله اول در حد  $e^{\beta\epsilon_0} \rightarrow z$  به سمت بی نهایت میل می کند. بنابر این تصویری که در صفحه قبل نشان داده ایم درست است و تنها سهم حالت پایه است که می بایست جداگانه در نظر گرفته شود. با این استدلال اکنون روشن است که چگونه می بایست روابط (۳۵) تا (۳۷) را برای بوزون ها بنویسیم. ( برای سادگی و با قرارداد خود، انرژی حالت پایه را برابر با صفر می گیریم). بنابراین روابط این روابط به شکل زیر در می آیند:

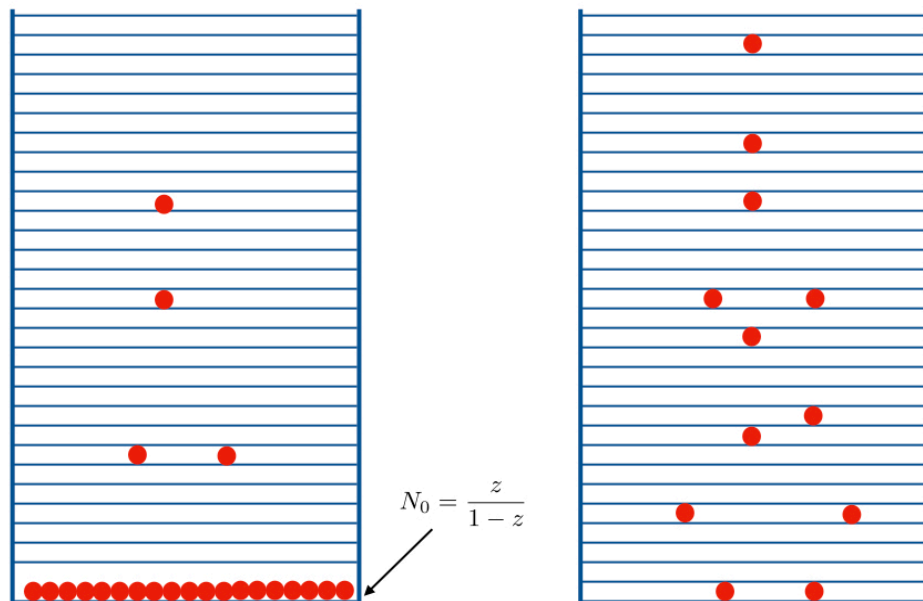
$$\ln Q = -\ln(1 - z) - \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx. \quad (۴۵)$$

$$N = \frac{z}{1 - z} + \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (۴۶)$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (۴۷)$$

دقت کنید که  $\frac{z}{1-z}$  تعداد متوسط ذرات در حالت پایه است که آن را با  $N_0$  نشان می دهیم:

$$N_0 = \frac{z}{1 - z}. \quad (۴۸)$$



$$T < T_c$$

$$T > T_c$$

شکل ۱۱: در سه بعد، وقتی که دما پایین می آید و از یک دمای بحرانی عبور می کند، مجموع ظرفیت لایه های بالاتر از حالت پایه، برای جای دادن ذرات محدود می شود. بعد از آن یک کسر قابل توجهی از ذرات به حالت پایه می روند. این پدیده همان چیزی است که به آن چگالش بوز-اینشتین گفته می شود.

این عدد یعنی تعداد ذرات در حالت پایه، با نزدیک شدن  $z$  به 1 می تواند بدون هیچ حدی بزرگ شود، شکل (۱۱). البته این جمله سهمی در انرژی یعنی در عبارت (۴۷) ندارد، زیرا انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته ایم. برای ادامه به رابطه (۴۵) توجه می کنیم. می توانیم انتگرال را به صورت جزء به جزء محاسبه کنیم. در نتیجه بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx &= \frac{1}{\frac{d}{2}} x^{\frac{d}{2}} \ln(1 - ze^{-x}) \Big|_0^\infty \\ &+ \frac{1}{\frac{d}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}} \frac{1}{z^{-1}e^x - 1} dx. \end{aligned} \quad (49)$$

با توجه به اینکه عبارت اول برابر با صفر است و با تعریف تابع زیر

$$g_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (50)$$

بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{PV}{kT} &= -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z) \\ N &= -\frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z) \\ \frac{U}{kT} &= \frac{d}{2} \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z).\end{aligned}\quad (51)$$

■ تمرین: نشان دهید که

$$g_n(1) = \zeta(n), \quad (52)$$

که در آن  $\zeta$  تابع زتای ریمان است یعنی

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \dots \quad (53)$$

می دانیم که  $\zeta(1) = \infty$  و  $\zeta(\frac{3}{2}) = 2.612$ . اگر به رابطه (51) نگاه کنیم متوجه می شویم که  $\frac{z}{1-z}$  تعداد متوسط ذرات موجود در حالت پایه و

$$\frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z)$$

تعداد ذرات موجود در تمامی حالت های برانگیخته است. این دو را به ترتیب با  $N_0$  و  $N_e$  نمایش می دهیم، یعنی

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z) \equiv N_0 + N_e. \quad (54)$$

اما می توان نشان داد که تابع  $g_n(z)$  یک تابع صعودی است و وقتی که  $d > 2$  است مقدار بیشینه آن متناهی است. (این موضوع را در درسهای آینده به دقت نشان خواهیم داد اگر چه خواننده می تواند با دانش کنونی اش نیز آن را ثابت کند.) به این ترتیب معلوم می شود که ظرفیت حالات برانگیخته برای جا دادن ذرات محدود است. این ظرفیت برابر است با

$$(N_e)_{max} = \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (55)$$

دقت کنید که این ظرفیت به دما بستگی دارد. حال اگر تعداد کل ذرات موجود در گاز بیش از این مقدار باشد، بقیه ذرات می بایست حتما به حالت پایه بروند. در این حالت می گوییم که ذرات شروع به چگالش در حالت پایه یا به سادگی شروع به چگالش کرده اند. بنابراین شرط چگالش آن است که

$$N \geq \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right), \quad (56)$$

و یا

$$n\lambda^d \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (57)$$

این شرط، شرطی ترکیبی از دما و چگالی است که با توجه به رابطه  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$  می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$n\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^d \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (58)$$

از این رابطه چند درس مهم می گیریم:

■ یک: برای یک گاز دوبعدی بوزونی ( $d = 2$ ) چگالش رخ نمی دهد، زیرا  $\zeta(1) = \infty$  و شرط چگالش هرگز محقق نمی شود، مگر در دمای صفر مطلق.

■ دو: بنابر این به ازای هر چگالی محدود هر وقت که دما را از یک حد بحرانی  $T_c$  کمتر کنیم، چگالش اتفاق می افتد و به ازای هر دمای محدود هر گاه چگالی را از یک مقدار بحرانی  $n_c$  زیاد تر کنیم چگالش آغاز خواهد شد. این دما و این چگالی بحرانی را با استفاده از رابطه چگالش می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} n_c &= \zeta\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2\pi mkT}}{h}\right)^d, \\ T_c &= \frac{h^2}{2\pi mk} \left(\frac{n}{\zeta\left(\frac{d}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{d}}. \end{aligned} \quad (59)$$

■ سه: رابطه (58) نشان می دهد که هر چقدر که جرم ذره کمتر باشد، چگالش زودتر اتفاق می افتد. هم چنین وجود  $h$  در این رابطه نشان از این دارد که این پدیده یک پدیده کوانتومی است.



## ۴ مسئله ها

- **مسئله اول:** الف: برای گاز فرمیونی ایده آل متوسط  $\langle n_i \rangle$  و سپس واریانس تعداد ذرات را در هر لایه بدست آورید.
- این کار را برای گاز بوزونی انجام دهید. هم برای حالت پایه و هم برای حالت های برانگیخته. هم در حد  $0 \rightarrow z$  و هم در حد  $1 \rightarrow z$ .
- **مسئله دوم:** برای گاز فرمی ایده آل در بعد دلخواه  $d$  و در دمای صفر انرژی فرمی، فشار و انرژی را بدست آورد. نشان دهید که رابطه فشار و انرژی همواره یک رابطه ساده است.
- **مسئله سوم:** انرژی فرمی را برای گاز الکترونی درون یک فلز تخمین بزنید. دمای فرمی را برای همین گاز تخمین بزنید و آن را با دمای اتاق مقایسه کنید. فشار گاز الکترونی را در دمای صفر تخمین بزنید.
- **مسئله چهارم:** انرژی فرمی را برای گاز نوترونی درون یک ستاره نوترونی تخمین بزنید. دمای فرمی را برای همین گاز تخمین بزنید و آن را با دمای اتاق مقایسه کنید. فشار گاز نوترونی را برای این ستاره تخمین بزنید.
- **مسئله پنجم:** برای یک مول از گاز هلیوم  $^4\text{He}$  که در فشار یک اتمسفر قرار دارد، دمایی را که در آن چگالش رخ می دهد محاسبه کنید. فشار و انرژی گاز را در دو حد  $0 \rightarrow z$  و  $1 \rightarrow z$  حساب کنید.
- **مسئله ششم:** یک گاز فرمیونی را در یک بعد در نظر بگیرید. طول ظرف برابر با  $L$  و جرم ذرات برابر با  $m$  است. انرژی فرمی و دمای فرمی را حساب کنید.
- **مسئله هفتم:** انرژی فرمی، دمای فرمی و فشار گاز در دمای صفر را برای مثال های زیر حساب کنید. در هر مورد اگر به داده ای احتیاج دارید آن را با استفاده از تخمین فیزیکی یا با استفاده از منابع مجازی پیدا کنید:
- یک- گاز الکترونی درون یک فلز سه بعدی،
  - ب- گاز الکترونی در یک کوتوله سفید،
  - پ- گاز نوترونی درون یک ستاره نوترونی.

## ۵ ضمیمه: تبدیل جمع روی حالت ها به انتگرال

در محاسبه تابع پارش برای فرمیون ها و بوزون ها باید عبارتی را روی تمام حالت های کوانتومی جمع بزنیم. هر حالتی با اعداد کوانتومی  $l_1, l_2, \dots, l_d$  مشخص می شود. این اعداد، مثبت و صحیح هستند و همگی در شرط  $0 \leq l_i < \infty$  صدق می کنند. برای تجسم بهتر  $d$  را برابر با 2 می گیریم. آنچه که برای این بعد می آموزیم به راحتی به ابعاد دلخواه نیز تعمیم پیدا می کند. نکته مهم این است که تابع پارش مستقما به  $l_i$  ها بستگی ندارد بلکه بستگی آن از طریق تکانه های  $k_i = \frac{\pi}{L} l_i$  است. ( $\hbar$  را برابر با یک گرفته ایم.) اگر وقتی که  $l_i$  ها تغییر می کنند،  $k_i$  خیلی به آهستگی تغییر کند می توانیم جمع روی  $l_i$  ها را به انتگرال روی  $k_i$  تبدیل کنیم. برای این کار کافی است محاسبه کنیم که به ازای هر بازه کوچک  $\Delta k_i$  چه تعداد نقطه در شکل (۱۲) وجود دارد. این تعداد را از روی شکل می توان تعیین کرد: دیده می شود که در هر امتدادی این تعداد برابر است با:

$$\Delta l_i = \frac{\Delta k_i}{\frac{\pi}{L}}$$

و در نتیجه در بعد دلخواه  $d$  قاعده زیر را برای تبدیل جمع به انتگرال داریم:

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^d \int dk_1 dk_2 \dots dk_d \quad (60)$$

و اگر تابع انتگرالده تنها به اندازه  $k$  بستگی داشته باشد، می توان انتگرال را به صورت زیر نوشت که در آن این موضوع نیز رعایت شده است که جمع و در نتیجه انتگرال روی  $k_i$  های مثبت صورت می گیرد:

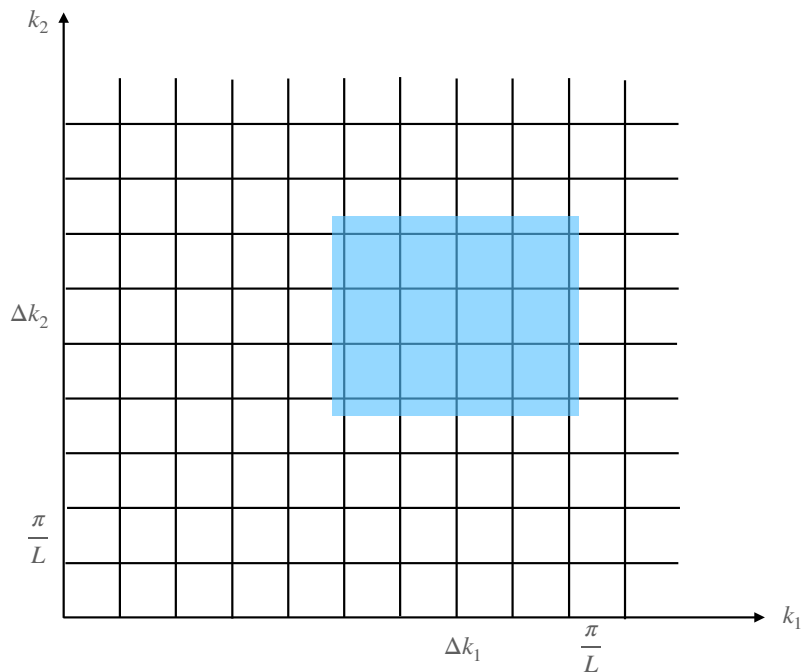
$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} = \left(\frac{V}{(2\pi)^d}\right) \Omega_{d-1} \int k^{d-1} dk \quad (61)$$

که در آن  $\Omega_{d-1}$  سطح کره  $d-1$  بعدی است. رابطه (۶۱) یک رابطه اساسی است که به راه های مختلف در محاسبات مکانیک آماری و نظریه کوانتومی پدیدار می شود و می بایست نحوه استخراج آن را به خوبی فرا گرفت. در موضوعی که با آن سر و کار داریم تابع زیر انتگرال تابعی است از  $\beta\epsilon = \beta \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ . یعنی با انتگرال های از نوع زیر سر و کار داریم:

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} F(\beta\epsilon_l) = \frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty k^{d-1} dk F(\beta\epsilon). \quad (62)$$

بنابر این بهتر است که متغیر انتگرال را  $x = \beta\epsilon$  بگیریم. برای این کار می بایست بنویسیم:

$$x = \beta\epsilon = \beta \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (63)$$



شکل ۱۲: در هر فاصله ی  $\Delta k_i$  تعداد  $\Delta n_i = \frac{\Delta k_i}{\frac{\pi}{L}}$  تا نقطه وجود دارد.

و از آنجا

$$k = \left(\frac{2m}{\beta \hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda} x^{\frac{1}{2}}, \quad (۶۴)$$

که در آن  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$  طول موج گرمایی است. بنابراین

$$\frac{V \Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} k^{d-1} dk = \frac{V \Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \frac{2^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\lambda^d} \frac{1}{2} x^{\frac{d}{2}-1} dx = \frac{V}{\lambda^d} \left(\frac{\Omega_{d-1}}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\right) x^{\frac{d}{2}-1} dx \quad (۶۵)$$

اما می دانیم که

$$\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

بنابر این به رابطه ساده زیر می رسم:

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_d} F(\beta \epsilon_1) = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} dx F(\beta \epsilon_{\mathbf{x}}). \quad (۶۶)$$

رابطه فوق برای هر تابعی درست است. این رابطه یک رابطه کلی است که بیان می کند جمع روی ویژه مقادیر انرژی را چگونه به یک انتگرال تبدیل کنیم.

---

■ **قدردانی:** از آقای آرمین یداللهی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳ که با دقت استثنایی تمامی اشکالات متن اولیه این درسنامه را به من یادآوری کردند تشکر می کنم.

---